

Posudek oponenta habilitační práce

Masarykova univerzita

Fakulta

Obor řízení

Uchazeč

Pracoviště uchazeče, instituce

Habilitační práce

Oponent

Pracoviště oponenta, instituce

Přírodovědecká

Algebra a teorie čísel

Bc. Lukáš Vokřínek, PhD

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta
MU

Algorithmic aspects of topological problems

doc. RNDr. Martin Tancer, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, Matematicko-fyzikální
fakulta, Univerzita Karlova

Habilitační práce Lukáše Vokřínka sestává ze sedmi článků, jejichž je L. Vokřínek spoluautorem nebo jediným autorem, a společného komentáře k těmto článkům. Celkový rozsah práce je téměř 250 stran. V souladu s názvem práce, hlavním sjednocujícím tématem jsou výpočetní otázky v topologii; práce má však také výrazný přesah do algebry, teorie čísel a kombinatorické geometrie. Konkrétněji bych hned v úvodu rád zdůraznil, že L. Vokřínek má velmi výrazný podíl na rozvoji "výpočetní homotopické teorie". Systematická nedávná práce L. Vokřínka a dalších v této oblasti ukazuje, že lze efektivně algoritmicky řešit mnoho problémů homotopické povahy, které se dříve zdály algoritmicky těžko řešitelné nebo přímo neřešitelné.

Kvalitu článků, z nichž práce sestává, lze doložit tím, kam tyto články byly přijaty. Článek [1], který L. Vokřínek napsal společně s M. Čadkem, M. Krčálem, J. Matouškem, F. Sergeraertem a U. Wagnerem, obdržel cenu za nejlepší článek na A* konferenci SODA v roce 2012 (zkrácená verze článku, tj. rozšířený abstrakt). Plná verze tohoto se objevila v "Journal of the ACM", pravděpodobně nejprestižnějšího časopisu v teoretické informatice současnosti. Články [2,3,4,5] vyšly také ve vynikajících časopisech "SIAM Journal of Computing" nebo "Discrete & Computational Geometry". Článek [7] vyšel v AMS sériích "Contemporary Mathematics". Článek [6] je recenzován.

L. Vokřínek také prokazuje, že je schopen zdárně pracovat zcela samostatně (články [5,7]), v menším týmu (články [4,6]) i ve větším týmu (články [1,2,3]).

Co se obsahu práce týče, úvodním článkem k tématu práce je článek [1]. Ten se pro d alespoň 2 zabývá popisem homotopických tříd $[X, Y]$ zobrazení z prostoru X dimenze nejvýše $2d-2$ do $(d-1)$ -souvhlého prostoru Y . Za těchto předpokladů má $[X, Y]$ strukturu abelovské grupy a [1] ukazuje, jak tuto strukturu algoritmicky spočítat (když X a Y jsou zadané jako simplicialní komplexy nebo obecněji simplicialní množiny). Také je pro zadané simplicialní zobrazení možné spočítat, kterému prvku v této struktuře odpovídá. Tento článek, dle mého názoru, znamenal opravdu významný krok v pohledu na to, jaké jsou možnosti výpočetní homotopické teorie. Zároveň byl patřičně doceněn komunitou (viz zmínka výše).

Článek [2] (stejná skupina autorů s výjimkou F. Sergeraerta) přímo souvisí s [1], umožňuje výpočet Postnikovových systémů v polynomiálním čase, což pak společně s prací Krčála,

Matouška a Sergeraerta umožňuje řešit problém z článku [1] v polynomiálním čase (při pevném d).

Článek [4] (společně s M. Čadkem a M. Krčálem) představuje další významné rozšíření [1] a [2]. Umožňuje řešit problém [1] v polynomiálním čase v ekvivariantním případě, což také vede autory ke zkoumání řešitelnosti obecnějšího "lifting-extension" problému. Z mého osobního pohledu, rozšíření na ekvivariantní považuji za velmi důležité i kvůli jeho aplikaci. Vede totiž k řešitelnosti problému vnořitelnosti simplicialních komplexů v takzvané metastabilní mezi, což je otázka kterou jsem se (v jiném rozmezí) také intenzivně zabýval. Zároveň článek [4] závisí na čistě algebraickém článku [7] L. Vokřínka.

Krom pozitivních výsledků ohledně algoritmické řešitelnosti v oblasti výpočetní homotopické teorie je také důležité umět poznat neřešitelné případy. To je doloženo článkem [3] (stejný seznam autorů jako u [2]), který ukazuje algoritmickou nerozhodnutelnost, pokud se relaxuje podmínka, že X má dimenzi nejvýše $2d-2$. V tomto článku najdeme i souvislost s teorií čísel, jelikož využívá algoritmickou nerozhodnutelnost problému, zda má zadaný systém diofantických rovnic řešení. Také je velmi zajímavé zpozorovat kontrast s článkem [5]: článek [3] ukazuje nerozhodnutelnost i pokud je Y sudě-dimenzionální sféra. Na druhou stranu v [5] L. Vokřínek ukazuje, že pro liše-dimenzionální sféry je problém řešitelný.

V závěru tohoto souhrnu zbývá zmínit článek [6] (společně s M. Filakovským), ten se zabývá variantou výpočtu homotopie dvou zobrazení (souvisí s [1], ale výrazně zmírňuje předpoklad $(d-1)$ -souvislosti Y). Také se zabývá výpočtem bodových homotopických tříd ze suspenze.

Práce také krátce zmiňuje očekávání, že vylepšením/změnou použitých technik lze problém vnořitelnosti simplicialních komplexů řešit i mimo metastabilní mez. Na takový výsledek se velmi těším.

Výše zmiňované články prokazují systematickou a těžkou práci L. Vokřínka na tématu. Ač výsledky sdílejí jistou podobnost tématu, důkazové techniky jsou velmi různorodé, což ukazuje na šíří záběru L. Vokřínka. Nemám pochybnosti, že alespoň takto úspěšný bude i nadále. Zároveň je práce čtivá, začíná obecnějším seznámením s tématem a později proniká do hlubších souvislostí. Jediná drobnost je, že bych v úvodním komentáři možná čekal nějakou stručnou zmínku o předchozí práci v oblasti konstruktivní algebraické topologie od Sergeraerta a dalších. Ale asi se nedá očekávat, že by dopředu uchazeč uhodnul každé přání oponenta a tato dřívější práce je zmíněna v jednotlivých článcích.

Dotazy oponenta k obhajobě habilitační práce (počet dotazů dle zvážení oponenta)

Sám tuším, že zde budou problémy s jednoduchou souvislostí, ale přesto se zeptám: Je nějaká šance, že by přístup pomocí výpočetní homotopické teorie mohl něco říci o problému vnořování simplicialních komplexů i v situaci, kdy dimenze cílového prostoru je 4?

Závěr:

Habilitační práce Lukáše Vokřínka *Algorithmic aspects of topological problems* jednoznačně **splňuje** požadavky standardně kladené na habilitační práce v oboru Algebra a teorie čísel.

V Praze dne 12.3.2018